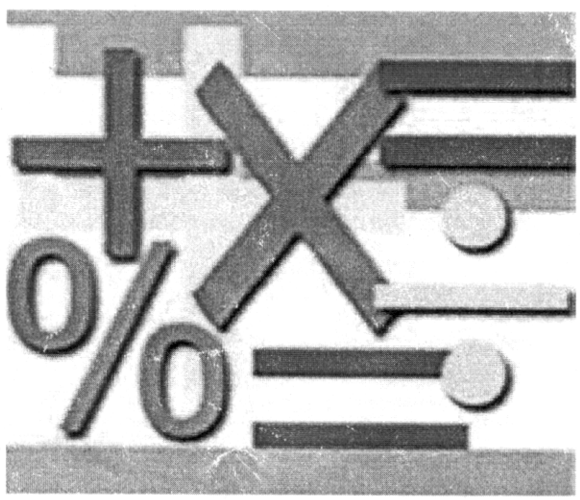
कक्षा 10 के छात्र/छात्राओं में सीखने की कठिनाइयों
(Learning difficulties) को दूर करने हेतु

प्रेरणा

Revision Notes

गणित



राज्य शिक्षा–शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् बिहार, पटना द्वारा विकसित

प्रस्तावना

विषय:- गणित कक्षा-X

'X' बोर्ड की परीक्षा नज़दीक आते ही हमारे बच्चों का तनाव और उन पर परीक्षा में अच्छा करने का दबाव बढ़ जाता है।

इन्हीं बातों के मद्देनज़र बिहार सरकार ने 'SCERT' की मदद से ऐसा Learning Deficit Material बनाया है जो बिहार के X^{th} बोर्ड के परीक्षार्थियों के लिए अत्यन्त उपयोगी है। ये Learning Deficit सामग्री बच्चों को परीक्षा के अन्तिम घड़ियों में अत्यन्त लाभदायक साबित होगी। ये Learning Deficit Material इस तरह से बनाया गया है कि गागर में सागर समा जाए और बच्चे बहुत जल्द पूरी गणित की किताब को Revise कर लें और पूरे आत्मविश्वास के साथ परीक्षा में अधिक से अधिक अंक प्राप्त कर पायेगें।

गणित के इस Learning Deficit Material में सात खण्ड हैं जो कि 15 Chapter में बंटे हुए हैं और हर Chapter पर Learning Deficit Material बड़े संक्षेप में बनाया गया है जो कि बहुत कम समय में गणित के पूरे पाठ्य पुस्तक से अवगत करा देता है। X^{th} Board गणित के प्रश्नों का खण्डों और अंकों का वर्गीकरण और अंकों और प्रश्नों का वर्गीकरण निम्न प्रकार है:-

खण्ड	**अंक**
(1) संख्या पद्धति	10
(2) बीजगणित	20
(3) त्रिकोणमिति	20
(4) नियामक ज्यामिति	10
(5) ज्यामिति	20
(6) क्षेत्रमिति	10
(7) सांख्यिकी एवं प्रायिकता	10
कुल	100

	प्रश्नों की संख्या	**प्रत्येक में अंक**	**कुल अंक**
	20	01	20
	11	02	22
	11	03	33
	05	05	25
कुल	47	–	100

बच्चे 20 अंको वाले खण्डों को ज्यादा समय देकर उस पर अच्छी पकड़ बना सकते हैं और ज़्यादा से ज़्यादा अंक लाया जा सकता है।

बच्चे, ज्यामिति से प्रमेय और रचना
त्रिकोणमिति से ऊँचाई और दूरियाँ
मेन्सुरेशन से पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन
अलजेबरा से ग्राफीय विधि से हल

वाले खण्डों को कम समय में Revise कर के अपने Learning Deficit को दूर कर के अच्छा अंक ला सकते हैं।

अतः बच्चों को ढेर सारी शुभकामनाओं के साथ ये Leaning Deficit Material उन्हें समर्पित किया जा रहा है।

----×----

अध्याय-1

वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

युक्लिड विभाजन प्रमेयिका (Euclid's Division Lemma)

दो धनात्मक पूर्णांक (Positive Integer) के भाग की प्रमेयिका

दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिये गये हों, तो ऐसी अद्बितीय पूर्ण संख्याएँ q और r प्राप्त होते हैं कि $a = bq + r, 0 \le r < b$

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic):

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यह गुणनखण्डन अभाज्य गुणनखण्डों के आने वाले क्रम के बिना अद्बितीय होता है।

अर्थात् यदि x एक भाज्य संख्या है तो

$x = P_1 P_2 -----P_n$, जहाँ $P_1 \le P_2 \le P_3 \le ---- \le P_n$

और $P_1, P_2, --P_n$ अभाज्य संख्याएँ हैं।

प्रमेय $\rightarrow$ P एक अभाज्य संख्या है, यदि P, a^2 को विभाजित करती है, तो P, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

प्रश्न 1. सिद्ध किजिए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल:- माना कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए $3\sqrt{2}$ को $\frac{a}{b}, b \ne 0$ के रूप मे व्यक्त कर सकते हैं।

अत: $3\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{3b}$

चूँकि a, b और 3 तीनों ही पूर्णांक संख्या है। इसलिए $\frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या होगी।

इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो एक विरोधाभास कथन है क्योंकि

$\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या मानना गलत है।

अतः $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2. यूक्लिड (Euclid) एल्गोरिथ्म से म0स0 ज्ञात कीजिए।

(1) 867 और 255

अतः युक्लिड भाग लेमा से:-

$$867 = 255 \times 3 + 102 \text{ (शेष)}$$

भाजक 255 और शेष 102 को लेने पर

$$255 = 102 \times 2 + 51 \text{ (शेष)}$$

पुनः $102 = 51 \times 2 + 0$

युक्लिड एल्गोरिथ्म के अनुसार शेष '0' (शून्य) आ जाने पर म0स0 प्राप्त हो जाता है।

चूँकि अंतिम अशून्य शेष 51 है। अतः अभीष्ट म0स0=51

प्रश्न 3. अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का प्रयोग कर- 392 और 3216 का म0स0 ज्ञात कीजिए।

उत्तर:- मूलभूत प्रमेय के प्रयोग द्वारा म0स0 निकालने में सर्वप्रथम दिये गये संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखते हैं:

$$392 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^2$$

$$3216 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 67 = 2^4 \times 3 \times 67$$

$\therefore$ म0स0 $(392, 3216) = 2^3$ (उभयनिष्ठ गुणनखण्ड का सबसे छोटा घात)

$$\text{ल॰स॰ } (392,\ 3216) = \frac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{\text{म॰स॰ } (392,\ 3216)} = \frac{392 \times 3216}{2^3 (= 8)}$$

$$= \frac{1260672}{8}$$

$$= 157584$$

[$\because$ *ल0स0 × म0स0 = संख्य ाओ का गुणनफल*]

वास्तविक संख्याएँ (Real Number)

परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार
(Decimal Expansion of Rational Number)

सांत दशमलव प्रसार

परिमेय संख्या $\frac{P}{q}$, जहाँ P और q सह अभाज्य है तथा q का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n 5^m$ के रूप मे हो जहाँ $m, n, \geq, o$

Example: (1) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}$

$= \frac{3}{2^3}$

(2) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2\times7\times521}{5^4}$

आवर्ती असांत दशमलव प्रसार

परिमेय संख्या $\frac{P}{q}$ में q का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n 5^m$ के रूप में न हो जहाँ $n, m, \geq, o$

Example: (1) $\frac{64}{455}$

(2) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$

प्रश्न 1. $\frac{15}{1600}$ का दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती है? ज्ञात करें।

उत्तरः- $\frac{15}{1600} = \frac{15}{16\times100} = \frac{15}{2^4\times2^2\times5^2} = \frac{15}{2^6\times5^2}$

$\because \frac{p}{q}$ के रूप में $\frac{15}{1600} = \frac{15}{2^6\times5^2}$ अर्थात $q = 2^6\times5^2$ (अर्थात 2^m ´ 5^n, $m, n, \geq, o$)

अतः $\frac{15}{1600}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

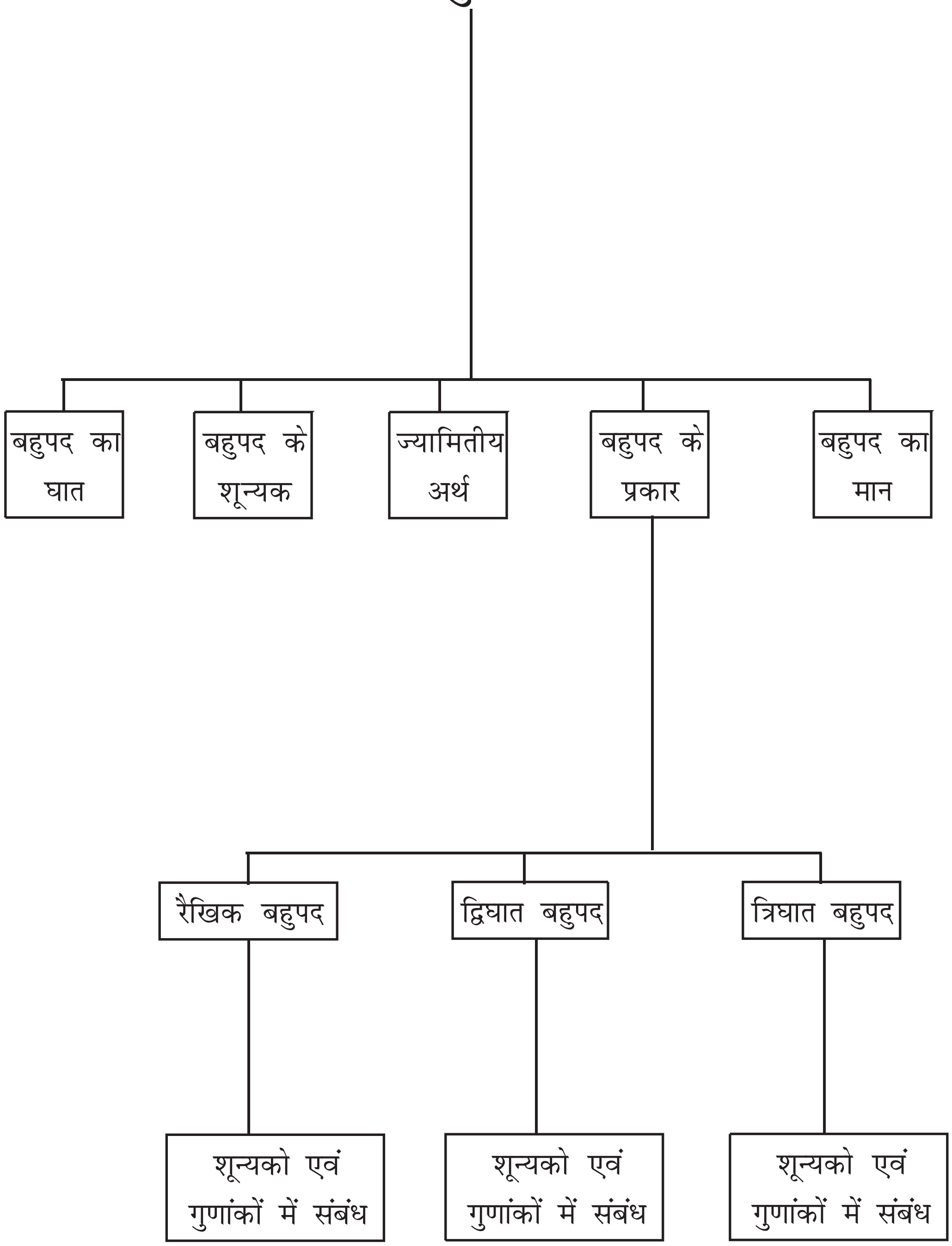
[संभावित अभ्यास प्रश्न $\rightarrow$ (i) $\frac{6}{15}$ (ii) $\frac{64}{455}$ (iii) $\frac{17}{512}$]

☆☆ → अपरिमेय संख्या का ऋण (−) और व्युत्क्रम अपरिमेय होता है।

→ परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का योग एवं अन्तर अपरिमेय होता है

अध्याय–2

बहुपद


बहुपद का घात
बहुपद के शून्यक
ज्यामितीय अर्थ
बहुपद के प्रकार
बहुपद का मान
रैखिक बहुपद
द्विघात बहुपद
त्रिघात बहुपद
शून्यको एवं गुणांकों में संबंध
शून्यको एवं गुणांकों में संबंध
शून्यको एवं गुणांकों में संबंध

बहुपद (Polynomial)

एक चर वाला बहुपद $P(x)$, चर x निम्न रूप का एक बीजीय व्यंजक है:-

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2............a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं एवं n एक अऋणात्मक पुर्णांक है।

बहुपद $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ जहाँ $a_n \neq 0$ का घात n है।

$5x+7$ का घात 1 है।

घात 1 के बहुपद को रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) कहते हैं।

जैसे:- $2x-3, \sqrt{3}x+5, y+\sqrt{2}$

घात 2 के बहुपद को द्विघात बहुपद (Quadratic Polynomial) कहते हैं।

जैसे:- $y^2-2, 2-x^2+\sqrt{3}x$

घात 3 के बहुपद को त्रिघात बहुपद (Cubic Polynomial) कहते हैं।

जैसे:- $x^3-5, 4x^3-3x^2+x+4$

यदि $P(x), x$ चर में एक बहुपद हो तो x की जगह कोई अचर a रखने पर प्राप्त वास्तविक संख्या $P(x)$ का $x=a$ पर मान कहलाता है एवं $P(a)$ द्वारा सूचित किया जाता है।

यदि $P(x) = x^2+4x-25$ तो $x=3$ पर

$P(x)$ का मान $P(3) = 3^2+4\times3-25 = 9+12-25 = -4$

एक वास्तविक संख्या a बहुपद $P(x)$ का शून्यक (zero) कहलाता है यदि $P(a)=0$

$P(x) = x^2-8x-20$ का $x=-2$ पर मान

$$P(-2) = (-2)\times(-2) - 8\times(-2) - 20 = 4+16-20 = 0$$

अत: $-2, P(x) = x^2-8x-20$ का एक शून्यक है।

रैखिक बहुपद $ax+b$ का शून्यक $= \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(\text{अचरपद})}{x \text{ का गुणांक}}$

ज्यामितीय अर्थ-बहुपद के शून्यको का ज्यामितीय अर्थ होता है कि वह बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को कितने बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करता है।

द्विघात बहुपद ax^2+bx+c के शून्यक α और β हो तो शून्यकों का

योग $= \alpha+\beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{का गुणांक}}$

यदि बहुपद का ग्राफ x –अक्ष को n बिन्दुओं पर काटती है तो बहुपद के शून्यकों की संख्या n होगी। यदि बहुपद x –अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटती है तो शून्यकों की संख्या 2 होगी। यदि बहुपद x –अक्ष को नहीं काटती है केवल y –अक्ष को काटती है तो शून्यकों की संख्या 0 होगी।

द्विघात बहुपद $\Rightarrow x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ शून्यकों का गुणनफल

यदि त्रिघात समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक α, β, γ हो तो,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

उदाहरण:- द्विघात बहुपद के $x^2 + 7x + 10$ शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:- $x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x+5) + 2(x+5) = (x+2)(x+5)$

इसलिए $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x + 5 = 0$ अर्थात

जब $x = -2$ या $x = -5$ हो।

अत: दिये गये बहुपद के शून्यक -2 और -5 है।

शून्यकों का योग $= -2 + (-5) = -7 = \frac{-7}{1} = \frac{-(x \text{का गुणांक})}{x^2 \text{का गुणांक}}$

शून्यकों का योगफल $= (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{का गुणांक}}$

उदाहरण:- एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमश: -3 और 2 है।

हल:- द्विघात बहुपद $\Rightarrow x^2 -$(शून्यकों का योग) $x +$ शून्यको का गुणनफल

$\Rightarrow x^2 - (-3)x + 2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2$

बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

यदि $P(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$$\boxed{P(x) = g(x) \times q(x) + r(x)}$$

जहाँ $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात है।

उदाहरण:- $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि आपको इसके दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ ज्ञात है।

हल:- दिये गये दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं अतः $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ दिये गये बहुपद का एक गुणक है। अब विभाजन एल्गारिथ्म का प्रयोग दिये गये बहुपद और $x^2 - 2$ के लिए किया जाता है–

$$
\begin{array}{l}
x^2 - 2 \overline{)\, 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \,(}\, 2x^2 - 3x + 1 \\
\qquad\quad 2x^4 \qquad\quad -4x^2 \\
\qquad\; - \qquad\qquad\; + \\
\hline
\qquad\qquad -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
\qquad\qquad -3x^3 \qquad +6x \\
\qquad\qquad + \qquad\quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad x^2 - 2 \\
\qquad\qquad\qquad x^2 - 2 \\
\qquad\qquad\qquad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

इसलिए $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

अब $2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1 = 2x(x-1) - 1(x-1)$

$= (2x-1)(x-1)$

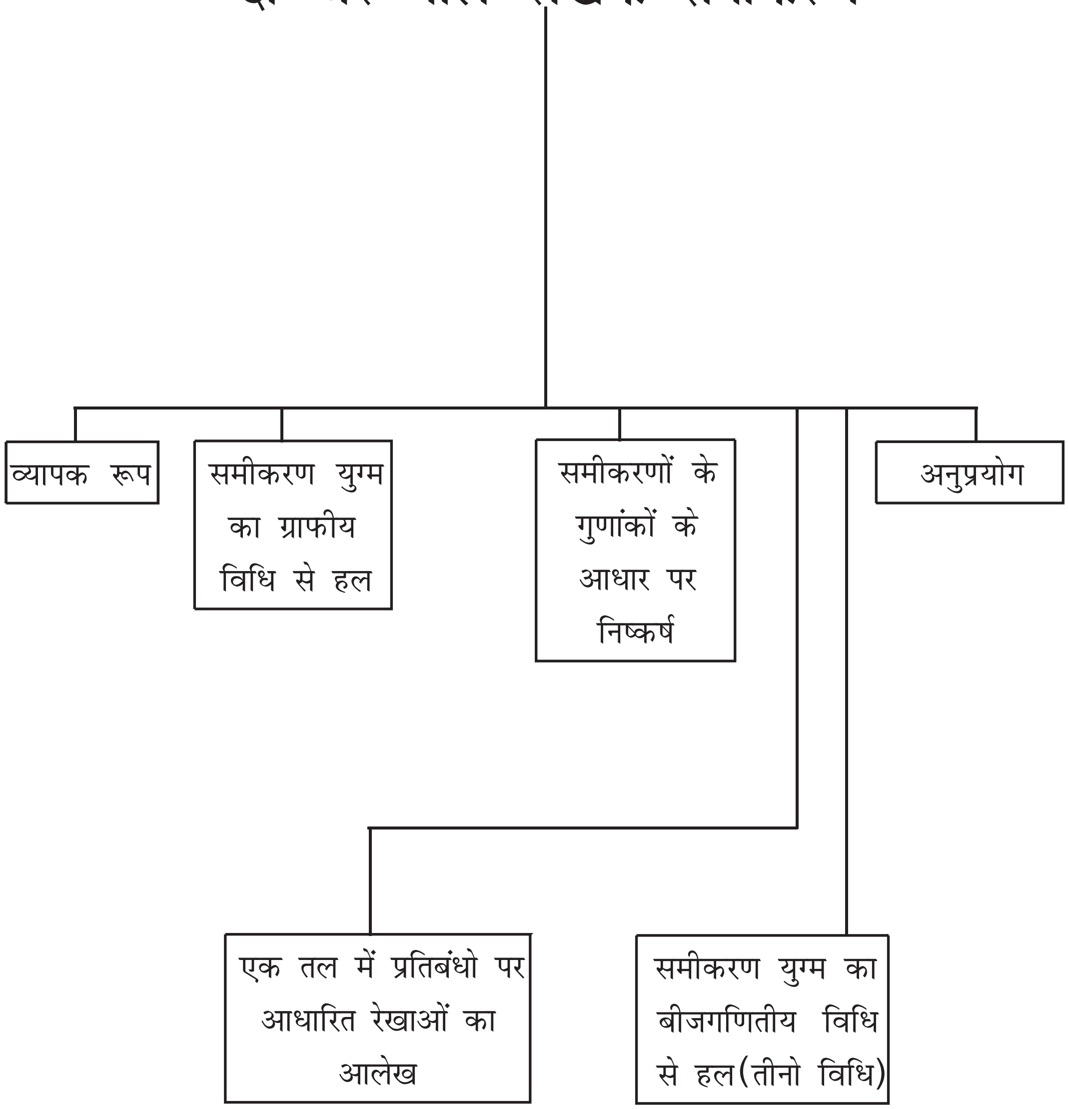
अतः इसके शून्यक $x = \frac{1}{2}$ और $x = 1$

अब दिये गये बहुपद के शूनयक $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ और 1 है।

☆☆☆

अध्याय–3

दो चर वाले रैखिक समीकरण



दो चर वाले रैखिक समीकरणयुग्म

वह समीकरण जिसको $ax+by+c=0$ के रूप में रखा जा सकता है जहाँ a,b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण कहलाता है।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण $ax+by+c=0$ का प्रत्येक हल (x,y) इस समीकरण को निरूपित करने वाली रेखा के एक बिन्दु के संगत होता है।

दो चरो x और y में रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप–

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \text{ है।}$$

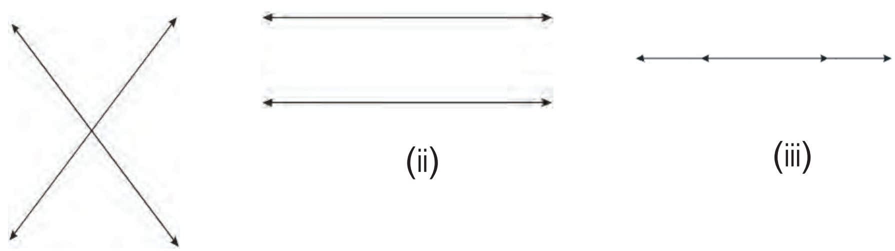
जहाँ a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 सभी वास्तविक संख्याएँ हैं।

एक तल में यदि दो रेखाएं हों, तो निम्न में से केवल एक ही संभावना हो सकती है:–

(i) दोनों रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(ii) दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती है अर्थात वे समान्तर हैं।

(iii) दोनों रेखाएँ संपाती हैं।



(ii) (iii)

(i)

रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल

दो चरों x और y में रैखिक समीकरण युग्म

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

व्यापक रूप में दिये गये समीकरणो के गुणांक को निम्न रूप में व्यक्त करने पर प्राप्त परिणाम के आधार पर निम्न निष्कर्ष प्राप्त होता है।

शर्त	हलों की संख्या	युग्म का न
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	एक और केवल एक हल होगा।	युग्म अविरोधी (संगत) कहलाता है।
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	अनगिनत हल होंगे	युग्म आश्रित कहलाता है।
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	कोई हल नहीं होगा	युग्म विरोधी (असंगत) कहलता है।

उदाहरण:-

क्र0सं0	रेखा युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1.	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_1} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय)
2.	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अनगिनत हल
3.	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं

उदाहरण:- जाँच कीजिए कि समीकरण युग्म

$x+3y=6$ ....(i)

$2x-3y=12$ ....(ii)

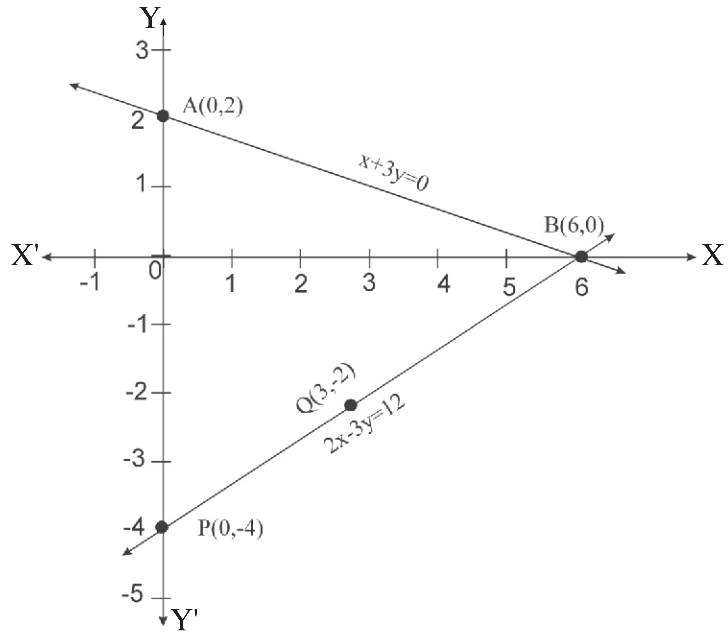
संगत है। यदि ऐसा है तो उन्हें ग्राफ द्वारा हल कीजिए।

हल:- समीकरण (i) और (ii)के ग्राफ खींचने के लिए हम प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात करते हैं, जो सारणी में दिए हैं।

x	0	6
$y=\frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y=\frac{2x-12}{3}$	-4	-2

एक ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं $A(0,2), B(6,0), P(0,-4)$ और $Q(3,-2)$ को आलेखित करते हैं और बिन्दुओं को मिलाकर रेखा AB और PQ आकृति बनाते हैं।



हम देखते हैं कि रेखाओं AB और PQ में एक उभयनिष्ठ बिन्दु B(6,0) है। इसलिए समीकरण युग्म का एक हल x=6, y=0 है, अर्थात समीकरण युग्म संगत है।

एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधि

रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की निम्न तीन विधियाँ हैं-

(i) प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method)

(ii) लूप्तीकरण विधि (Elimination Method) क

(iii) बज्र-गुणन विधि (Cross-Multiplication Method)

उदाहरण : निम्न रैखिक समीकरण युग्म को तीनों विधियों (प्रतिस्थापन, लुप्तीकरण, बज्र-गुणन) से हल करें-

$7x - 15y = 2$ ....(i)

$x + 2y = 3$ ....(ii)

हल : प्रतिस्थापन विधि से,

समीकरण (ii) से

$x + 2y = 3$

$\Rightarrow \quad x = 3 - 2y$ ....(iii)

x का यह मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं-

$$7(3-2y)-15y=2$$
$$\Rightarrow 21-14y-15y=2$$
$$-29y=-19$$
$$\therefore y=\frac{19}{29}$$

y का मान (iii) में रखने पर

$$x=3-2\times\frac{19}{29}=3-\frac{38}{29}=\frac{49}{29}$$

अतः $x=\frac{49}{29}, y=\frac{19}{29}$

(ii) लुप्तीकरण विधि से-

$7x-15y=2$ ....(i)

$x+2y=3$ ....(ii)

समीकरण (ii) को 7 से गुणा कर हम निम्न समीकरण प्राप्त करते हैं-

$7x+14y=21$ ....(iii)

x को विलुप्त करने के लिए समीकरण (i) में से (iii) घटाते हैं।

$$\begin{array}{r} 7x-15y=2 \\ -\;\; 7x \underset{-}{+} 14y \underset{-}{=} 21 \\ \hline -29y=-19 \end{array}$$

$$\therefore y=\frac{19}{29}$$

y का मान (i) में रखने पर हम पाते हैं-

$$7x-15\times\frac{19}{29}=2$$
$$\Rightarrow 7x=2+\frac{285}{29}=\frac{58+285}{29}=\frac{243}{29}$$
$$\Rightarrow x=\frac{\cancel{343}^{49}}{29\times\cancel{7}}=\frac{49}{29}$$
$$\therefore x=\frac{49}{29}, y=\frac{19}{29}$$

(iii) बज्र-गुणन विधि से-

$$7x - 15y = 2 \quad ....(i)$$

$$x + 2y = 3 \quad ....(ii)$$

उपरोक्त समीकरण युग्म इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$7x - 15y - 2 = 0$$

$$x + 2y - 3 = 0$$

वज्र-गुणन विधि से x एवं y का मान इस प्रकार दिया जा सकता है।

$$x = \frac{-15\times(-3) - 2\times(-2)}{7\times 2 - 1\times(-15)} = \frac{45+4}{14+15} = \frac{49}{29}$$

$$y = \frac{-2\times 1 - (-3)\times 7}{7\times 2 - 1\times(-15)} = \frac{-2+21}{14+15} = \frac{19}{29}$$

उदाहरण:- एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है, जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया कि भिन्न $\frac{x}{y}$ है।

प्रश्नानुसार $\quad \frac{x-1}{y} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 3x - 3 = y$$

$$\therefore 3x - y = 3 \quad ....(i)$$

पुनः $\quad \frac{x}{y+8} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 4x = y + 8$$

$$4x - y = 8 \quad ....(ii)$$

$$3x - \cancel{y} = 3$$

$$4x - \cancel{y} = 8$$

घटाने पर $\quad - \quad + \quad -$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

x का मान (i) में रखने पर

$$3x - y = 3$$
$$\Rightarrow 3 \times 5 - y = 3$$
$$\Rightarrow 15 - y = 3$$
$$\Rightarrow -y = 3 - 15 = -12$$
$$\Rightarrow -y = -12$$
$$\therefore y = 12$$
$$\therefore \text{भिन्न } \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$$

☆☆☆

अध्याय-4

द्विघात समीकरण

द्विघात समीकरण Quadratic Equation

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a,b,c\in R, a\neq 0$$

हल करने की विधि

गुणनखण्ड विधि द्वारा हल यदि दो रैखिक गुणनखण्डों में गुणनखण्डित किया जा सके।

पूर्ण वर्ग बना कर हल

द्विघाती सूत्र

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

द्वारा हल

तीनों विधियों में से एक का प्रयोग कर इबारती प्रश्नों को हल करना।

विविक्तकर

Discriminant

$D=b^2-4ac$

मूलों की प्रकृति

यदि $D>0;$ मूल असमान व वास्तविक

$D=0;$ मूल बराबर व वास्तविक

$D<0;$ कोई वास्तविक मूल नहीं

द्विघात समीकरण का सामान्य रूप(General form)

$ax^2+bx+c=0$ जहाँ $a,b,c,$ वास्तविक संख्याएँ है और $a\neq 0$ है।

द्विघात समीकरण को तीन तरह से हल कर सकते हैं-

(i) यदि द्विघात समीकरण को दो रैखिक गुणकों में गुणनखंड कर सके तो गुणनखण्ड विधि से हल निकाल सकते हैं।

(ii) द्विघात समीकरण का पूर्ण वर्ग बना कर हल।

(iii) सूत्र $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

प्रश्न:- हल करें: $3x^2-5x+2=0$

हल:

गुणनखंड विधि द्वारा	पूर्ण वर्ग बना कर हल	सूत्र द्वारा हल
$3x^2-5x+2=0$ $\Rightarrow 3x^2-3x-2x+2=0$ $\Rightarrow 3x(x-1)-2(x-1)=0$ $\Rightarrow (x-1)(3x-2)=0$ अब या तो $\Rightarrow x-1=0$ $\Rightarrow x=1$ या तो $\Rightarrow 3x-2=0$ $\Rightarrow x=\frac{2}{3}$	$3x^2-5x+2=0$ $\Rightarrow x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$ $\Rightarrow x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{2}{3}=0$ $\Rightarrow \left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}-\frac{2}{3}$ $\Rightarrow \left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25-24}{36}=\frac{1}{36}$ $\Rightarrow \left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\pm\sqrt{\frac{1}{36}}$ $\Rightarrow \left(x-\frac{5}{6}\right)=\pm\frac{1}{6}$ $\Rightarrow x=\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6}$ इसलिए $x=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$ या $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ अर्थात: $x=\frac{6}{6}$ या $x=\frac{4}{6}$ $x=1$ या $x=\frac{2}{3}$	$3x^2-5x+2=0$ यहाँ $a=3$ $b=-5$ $c=2$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times2}}{2\times3}$ $=\frac{5\pm\sqrt{(25-24}}{6}$ $=\frac{5\pm1}{6}$ अर्थात: $x=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1$ या $x=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

हम जानते हैं कि समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

यहाँ b^2-4ac को द्विघात समीकरण का विविक्तकर (Discriminant or 'D') कहते हैं।

स्पष्ठ है यदि

(i) $b^2-4ac>0$ हो तो द्विघात समीकरण के दो असमान वास्तविक मूल होते हैं।

(ii) $b^2-4ac=0$ हो तो द्विघात समीकरण के दो बराबर और वास्तविक मूल होते हैं।

(iii) यदि $b^2-4ac<0$ हो तो द्विघात समीकरण में कोई वास्तविक मूल नहीं होता हैं।

प्रश्न 1. k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हो

$$2x^2+kx+3=0$$

हल:- $2x^2+kx+3=0$ में मूल बराबर है।

$\Rightarrow D=0$

$\Rightarrow b^2-4ac=0$

$\Rightarrow k^2-4\times2\times3=0$

$\Rightarrow k^2=24$

$\Rightarrow k=\pm\sqrt{24}=\pm2\sqrt{6}$

☆ इबारती प्रश्नों को भी द्विघात समीकरण के माध्यम से हल किया जा सकता है।

प्रश्न 2. क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना संभव है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से दुगनी हो और उसका क्षेत्रफल $=800\ m^2$ हो? यदि है तो लम्बाई चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल:- माना कि चौड़ाई $=x$ तो लम्बाई $=2x$

प्रश्नानुसार क्षे0फ0 $=800\ m^2$

$\Rightarrow x\times2x=800$

$\Rightarrow 2x^2=800$

$\Rightarrow x^2=400$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{400}=\pm20$ $\because$ चौड़ाई $(-ive)$ नहीं होगी

$\therefore$ चौड़ाई $=20m$ तो लम्बाई $=2\times20=40m$

अध्याय–5

समान्तर श्रेढ़ी ARITHMETIC PROGRESSION (A.P.)

$A.P.$ में प्रथम n पदों के जोड़ का सूत्र $S = \frac{n}{2}(a + a_n)$

या

$$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

n पदों के जोड़ पर प्रश्नों को हल करना

संख्याओं का निश्चित प्रतिरूप (Pattern)

पहला पद (a);
सार्व अन्तर (d);
अन्तिम पद (a_n) या ℓ
n वाँ पद (a_n);
n पदों का जोड़ (s)

n वाँ पद के लिए सूत्र $a_n = a + (n-1)d$

n वाँ पद के लिए प्रश्न

समान्तर श्रेढ़ियाँ ARITHMETIC PROGRESSION (A.P.)

जब किसी अनुक्रम के पद किसी नियम के अनुसार लिखते हैं उसे श्रेढ़ी कहते हैं।

समान्तर श्रेढ़ी:- संख्याओं की एक ऐसी सूची है जिसमें दो लगातार पदों (Terms) का अन्तर समान होता है।

☆ यह अन्तर एक निश्चित संख्या होती है जिसे सार्व अन्तर (Common difference) कहते हैं।

☆ ये सार्व अन्तर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

उदाहरण:-

(सार्व अन्तर)

(i) 4, 8, 12, 16.......................[8- 4 = 12- 8 = 16 - 12 = 4]

(ii) 100, 80, 60.......................[80- 100 = 60 - 80 = -20]

(iii) $5,5,5,$...........................$[5-5=5-5=0($शून्य$)]$

(iv) $a, a+d, a+2d, a+3d.......[(a+d)-d=(a+2d)-(+d)=d]$

☆ अगर किसी समान्तर श्रेढ़ी का पहला पद a' हो और सार्व अन्तर 'd' हो तो हम उस समान्तर श्रेढ़ी के और पदों को लिख सकते हैं। जैसे:-

पहला पद $=a$ या $a_1=a$

दूसरा पद $=a+d$ या $a_2=a+d$

तीसरा पद $=a+2d$ या $a_3=a+2d$

चौथा पद $=a+3d$ या $a_4=a+3d$

n वां पद $=a+(n-1)d$ या $a_n=a+(n-1)d$

$a_n=a+(n-1)d$ को समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप (General form) कहते हैं।

यहाँ $a_n \rightarrow$ n वां पद $n \rightarrow$ पदों की संख्या

$a \rightarrow$ पहला पद $d \rightarrow$ सार्व अन्तर

General form (व्यापक रूप) का प्रयोग करके हम कुछ इस तरह के प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

प्रश्न 1. समान्तर श्रेढ़ी 2,7,12,.............. का 10वां पद ज्ञात करें।

यहाँ $a = 2, d = 7 - 2 = 5, n = 10$

उत्तरः- सूत्र- $a_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad a_{10} = 2 + (10-1) \times 5$

$= 2 + 9 \times 5$

$45 = 47$

प्रश्नः- समान्तर श्रेढ़ी ज्ञात करें जिसका तीसरा पद 5 और 7वां पद 9 हैं।

उत्तरः- प्रश्नानुसार- $a_3 = 5, \quad a_7 = 9$

सूत्र- या $a + (3-1)d = 5, \quad a + (7-1)d = 9$

या $a + 2d = 5$ ....(i)

$a + 6d = 9$ ....(ii)

समीकरण (ii) में समीकरण (i) घटाने पर

$(a + 6d) - (a + 2d) = 9 - 5$

या $4d = 4$

या $d = \frac{4}{4} = 1$

$d = 1$, समीकरण (i) में रखने पर

$a + 2 \times 1 = 5$

या $a = 5 - 2 = 3$

अतः समान्तर श्रेढ़ी $a, a+d, a+2d$...............

या $3, 3+1, 3+2\times1,$..............

या $3, 4, 5,$................

हम समान्तर श्रेढ़ी के n पदों को निम्नलिखित सूत्र की मदद से जोड भी सकते हैं।

सूत्र- $S = \frac{n}{2}(a + a_n)$

यहाँ $S \rightarrow n$ पदों का जोड़

$n \rightarrow$ पदों की संख्या

$a \rightarrow$ पहला पद

$a_n \rightarrow$ अंतिम पद

या nवाँ पद

दूसरा सूत्र- $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

यहाँ $S = n$ पदों का जोड़

$n \rightarrow$ पदों की संख्या

$a \rightarrow$ पहला पद

$d \rightarrow$ सार्व अन्तर

प्रश्न 2. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ी का योग ज्ञात करें।

2,7,12, ...10 पदों तक

उत्तर:- यहाँ $a = 2, \quad d = 5, \quad n = 10$

सूत्र- $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{10}{2}\{2 \times 2 + (10-1) \times 5\}$

$= 5\{4 + 9 \times 5\}$

$= 5 \times 49 = 245$

प्रश्न 3. $A.P.$ में यदि $a = 5, \quad d = 3,$ और $a_n = 50$ दिया है तो n और S_n ज्ञात कीजिए।

उत्तर:- प्रश्नानुसार-$a_n = 50$

सूत्र- $a + (n-1)d = 50$

या $5 + (n - 1) \times 3 = 50$

या $(n - 1) \times 3 = 50 - 5$

या $n - 1 = \frac{45}{3} = 15$

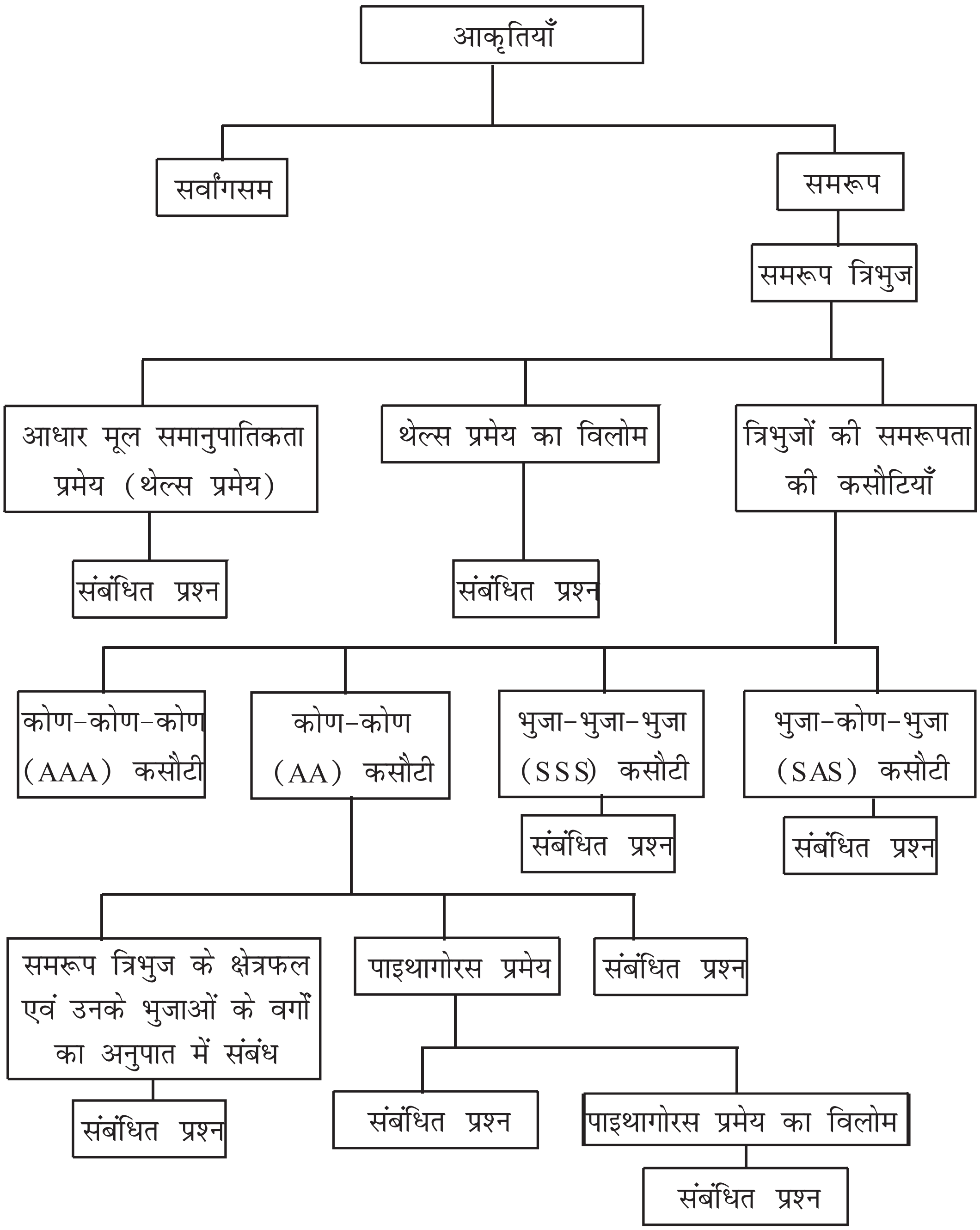
$\therefore \; n = 15 + 1 = 16$

सूत्र- $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$= \frac{16}{2}(5 + 50) = 8 \times 55 = 440$

अध्याय-6

समरूप त्रिभुज (Similar Triangles)



समरूप त्रिभुज (Similar Triangles)

आकृतियाँ (Figures)

सर्वांगसम (Congruent)

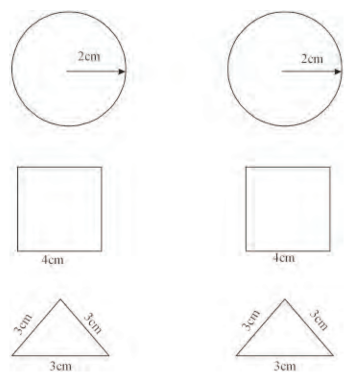
(1) वैसी आकृतियाँ जो समान आकार (Shape) तथा समान आमाप (Size) की हों।

जैसे:-

वृत्त

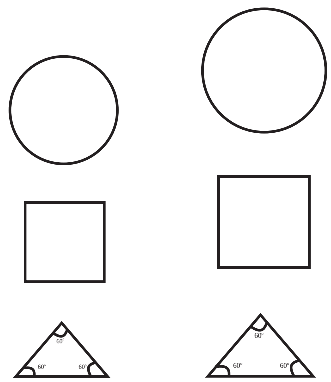
वर्ग

त्रिभुज



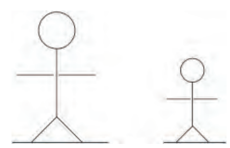
समरूप (Similar)

(1) वैसी आकृतियाँ जो समान आकार (Shape) की तो हों परन्तु समान आमाप होना आवश्यक न हों।



वृत्त

वर्ग



☆ सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परन्तु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

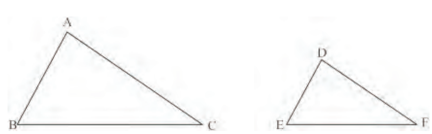
त्रिभुजों की समरूपता

☆ दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों।

(ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (अर्थात समानुपाती) हों।

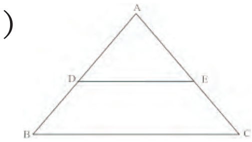
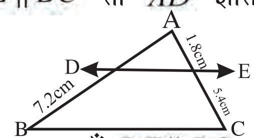
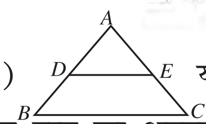
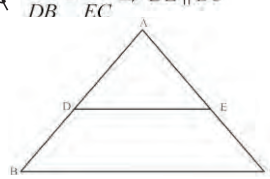
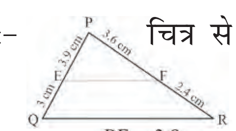
जैसं:-



यदि $\angle A = \angle D; \quad \angle B = \angle E; \quad \angle C = \angle F$

और $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

तो हम कह सकते हैं कि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

प्रमेय	चित्र द्वारा समझकर प्रश्न हल करना
(1) आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय) → यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।	(1)  यदि $DE \parallel BC$ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ☆ प्रश्न:- निम्नलिखित आकृति में यदि $DE \parallel BC$ तो AD ज्ञात करें।  उत्तर:- यहाँ $DE \parallel BC$ तो थेल्स प्रमेय से $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{7.2}=\frac{1.8}{5.4}$ $\Rightarrow AD=\frac{1}{3}\times 7.2=2.4cm$
(2) थेल्स प्रमेय के Corollaries	 (2) यदि $DE \parallel BC$ जिस तरह का अनुपात बायीं ओर से लेते हैं उसी प्रकार का अनुपात दायीं ओर से लेना चाहिए। $(a)\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{AC}$ $(b)\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ $(c)\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$ $(d)\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ $(e)\frac{BD}{AD}=\frac{EC}{AE}$
(3) थेल्स प्रमेय का विलोम → यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे तो वह तीसरी भुजा के समान्तर है।	(3) यदि $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$  प्रश्न:-  चित्र से बताएँ क्या $EF \parallel QR$ उत्तर:- यहाँ $\frac{PE}{EQ}=\frac{3.9}{3}=1.3$ और $\frac{PF}{FR}=\frac{3.6}{2.4}=1.5$ यह $\frac{PE}{EQ}\neq\frac{PF}{FR}$ यहाँ $EF \parallel QR$ नहीं है।

(4) त्रिभुज की समरूपता के लिए कसौटियाँ–

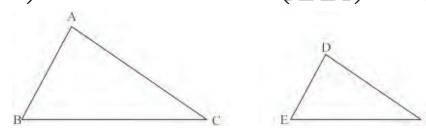
(क) यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में होती हैं और इसलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं।(AAA) कसौटी।

(ख)→ यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक अन्य त्रिभुज के कमशः दो कोणों के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (AA) कसौटी।

(ग)→ यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती हों तो उनमें संगत कोण बराबर होते हैं और इसलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।(SSS)कसौटी।

(घ)→ यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों के अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (SAS)कसौटी।

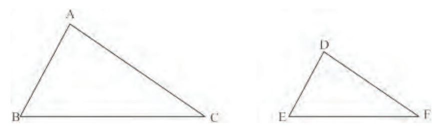
(क) कोण–कोण–कोण (AAA) कसौटी–



यदि $\angle A = \angle D; \quad \angle B = \angle E; \quad \angle C = \angle F$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

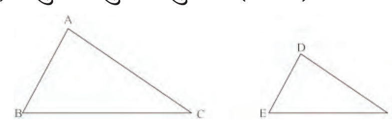
(ख) कोण–कोण (AA) कसौटी–



यदि $\angle A = \angle D; \quad \angle B = \angle E$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

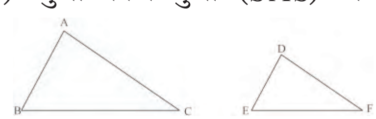
(ग) भुजा–भुजा–भुजा (SSS) कसौटी–



यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

(घ) भुजा–कोण–भुजा (SAS) कसौटी–



यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ और $\angle A = \angle D$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

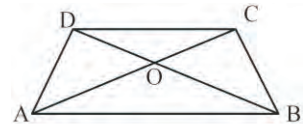
☆ प्रश्नः–समलंब $ABCD$, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए। सिद्ध करें कि

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

(5) समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल——

→ दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलो का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।

हल–



ΔDOC और ΔBOA में

$\Rightarrow \angle DOC = \angle BOA$ (शीर्षाभिमुख कोण)..(i)

और $AB \parallel CD$

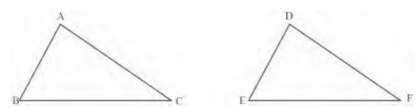
$\Rightarrow \angle OCD = \angle OAB$ (एकान्तर कोण)...(ii)

अत: (i) और (ii) से

$\Delta DOC \sim \Delta BOA$ (AAसमरूपता कसौटी)

अत: $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA}$

$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$



यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\Rightarrow \frac{ar\,(\Delta ABC)}{ar\,(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

प्रश्न:– दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4:9 के अनुपात में है। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का क्या अनुपात होगा।

हल:–→ $\frac{ar\,(\text{पहला }\Delta)}{ar\,(\text{दूसरा }\Delta)} = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81}$

$= 16:81$

प्रश्न:– यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ और अनके क्षेत्रफल क्रमश: $64cm^2$,$121cm^2$ है। यदि $EF = 15.4cm$ हो तो BC ज्ञात करें।

हल $\rightarrow \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2}$

$$\Rightarrow \frac{64}{121} = \frac{BC^2}{EF^2} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{8}{11}$$

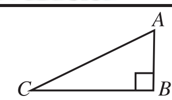
$\Rightarrow BC = \frac{8}{11} \times EF$

$\Rightarrow BC = \frac{8}{11} \times 15.4 = 8 \times 1.4$

$\Rightarrow BC = 11.2cm$

(6) पाइथागोरस प्रमेय

→ एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओ के वर्गों के योग के बराबर होता है।

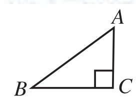


यदि $\angle B = 90$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

प्रश्न:- एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $\angle C = 90^\circ$ है। सिद्ध करें कि $AB^2 = 2AC^2$

हल:-



$\angle C = 90^\circ$

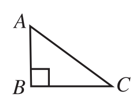
$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$. (पाइथागोरस प्रमेय)

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2 \quad [\because AC = BC]$

$\Rightarrow AB^2 = 2AC^2$

(7) पाइथागोरस प्रमेय का विलोम

→ यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा के सम्मुख कोण समकोण होता है।

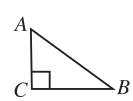


यदि $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow \angle B = 90$

प्रश्न ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है तो सिद्ध करें कि ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

हल:-



$AC = BC$ (दिया है)

$AB^2 = 2AC^2$ (दिया है)

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

$[AC = BC]$

अत: पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से

$\angle C = 90^\circ$

अत: ABC एक समकोण त्रिभुज है।

अध्याय-7

नियामक ज्यामिति (Co-ordinate geometry)

त्रिभुज के माध्यिकाओं के कटान बिन्दु को गुरूत्व केन्द्र या केन्द्रक कहते हैं।

x –अक्ष या भुज

x –अक्ष पर किसी बिन्दु का नियामक $(x,0)$ एवं x –अक्ष का समीकरण $y=0$

दो बिन्दु $P(x_1,y_1)$ और $Q(x_2,y_2)$ के बीच की दूरी $PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

मूल बिन्दु $(0,0)$ से किसी बिन्दु x,y की दूरी $=\sqrt{x^2+y^2}$

तीन बिन्दु $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ और $C(x_3,y_3)$ संरेख होंगे यदि $AB+BC=AC$ अर्थात AB की दूरी $+BC$ की दूरी $=AC$ की दूरी

ΔABC का क्षेत्रफल $=$

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

यदि बिन्दु A,B,C एक रैखिक है तो

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

$y-$ अक्ष या कोटि

$y-$ अक्ष पर किसी बिन्दु का नियामक $(y,0)$ एवं $y-$ अक्ष का समीकरण $x=0$

Section Formula

$A(x_1 y_1)$ $\quad$ $C(x_1 y)$ $\quad$ $B(x_2 y_2)$

m_1 $\quad$ m_2

बिन्दु C, AB रेखा को $m_1 : m_2$ में विभाजित करती है, तो

$$x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

$$y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

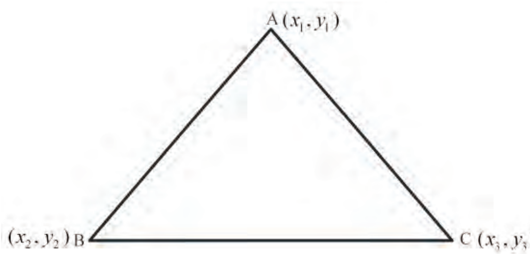
यदि C, रेखा AB के मध्य बिन्दु है तो C के नियामक $(\because\ m_1=m_2)$

$$\left[x=\frac{(x_1+x_2)}{2}, y=\frac{(y_1+y_2)}{2}\right]$$

दो बिन्दु (x_1,x_2) और (x_2,y_2) के मध्य बिन्दु का नियामक

$x-$ नियामक $=(x_1+x_2)/2$

$y-$ नियामक $=(y_1+y_2)/2$



प्रश्न 1. यदि बिन्दु $P(2,-3)$ की दूरी बिन्दु $Q(10,y)$ से 10 इकाई है तो y का मान क्या होगा।

उत्तरः- दूरी सूत्र से, $PQ=\sqrt{(2-10)^2+(-3-y)^2}$

$$\Rightarrow PQ^2=8^2+(3+y)^2$$

$$\Rightarrow PQ^2=8^2+(3+y)^2$$ (दिया गया है $PQ=10$)

$$\Rightarrow 10^2=8^2+(3+y)^2$$

$$\Rightarrow 100-64=9+6y+y^2$$

$$\Rightarrow y^2+6y+9-36=0$$

$$\Rightarrow y^2+6y-27=0$$

$$\Rightarrow (y+9)(y-3)=0$$

$$\Rightarrow y=3,-9$$

प्रश्न 2. मूल बिन्दु से बिन्दु $P(-3,-4)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तरः- मूल बिन्दु से किसी बिन्दु $P(x,y)$ की दूरी $=\sqrt{x^2+y^2}$

अतः मूल बिन्दु से $P(-3,-4)$ की दूरी $=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$

$=\sqrt{9+16}$ $=\sqrt{25}$ $=5$ इकाई

प्रश्न 3. K के किस मान के लिए बिन्दुएँ $(8,1),(K,-4)$ और $(2,-5)$ संरेख है।

उत्तरः- तीनों बिन्दु को शीर्ष मान कर एक त्रिभुज की परिकल्पना करते हैं। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा तो तीनों बिन्दु संरेख होंगे।

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$

$$=\frac{1}{2}[8(-4-(-5)+K(-5-1)+2[1-(-4)]$$

$$=\frac{1}{2}[8.1+K(-6)+2.5] \quad =\frac{1}{2}(18-6K).$$

यदि तीनों बिन्दु संरेख होंगे तो क्षेत्रफल $=0$

$$\therefore \frac{1}{2}(18-6K)=0$$

$$\Rightarrow 6K=18$$

$$\Rightarrow K=3$$

अध्याय-8

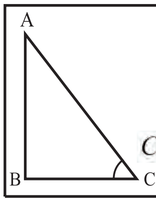
त्रिकोणमिति (Trigonometry)

त्रिकोणमितीय अनुपात

Sine, Cosine, Secant, Cosecant, Tangent, Cotangent

यदि एक न्यूनकोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो, तो कोण के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं।

ज्यामिति के समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण से छः अनुपात की उत्पत्ति होती है। यह अनुपात त्रिभुज के भुजाओं के अनुपात हैं।

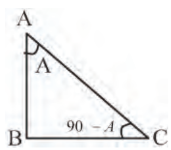


$$Sin\ c = \frac{AB}{AC}, Cos\ c = \frac{BC}{AC}, Tan\ c = \frac{AB}{BC}$$

$$Cosec\ c = \frac{AC}{AB}, Cot\ c = \frac{BC}{AB}, Sec\ c = \frac{AC}{BC}$$

जब न्यूनकोण $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ हो तो इस अनुपात का प्रयोग कर हम त्रिकोणमितीय अनुपात का मान(Value)ज्ञात कर सकते हैं।

समकोण त्रिभज में न्यूनकोण पूरक कोण हो तो पूरक कोण के लिए अनुपात निकाला जाता है।



$$Sin(90^\circ - A) = \frac{AB}{AC} = CosA$$

$$Cos(90^\circ - A) = \frac{BC}{AC} = SinA$$

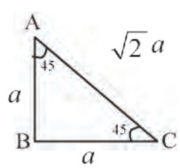
$$Tan(90 - A) = \frac{AB}{BC} = CotA$$

$$Cot(90 - A) = \frac{BC}{AB} = TanA$$

$$Sec(90^\circ - A) = \frac{AC}{BC} = Cosec\ A$$

$$Cosec(90^\circ - A) = \frac{AC}{AB} = SecA$$

उदाहरणस्वरूप :- ABC समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है।



$AB = BC = a$ (माना)

$$Sin45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

त्रिकोणमितीय अनुपात से संबधित सर्वसमिका को त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहते हैं।

$Sin^2 A + Cos^2 A = 1$

$Sec^2 A - Tan^2 A = 1$ जहाँ $0^\circ \le A \le 90^\circ$

$Cosec^2 A - Cot^2 A = 1$ जहाँ $0^\circ \le A \le 90^\circ$

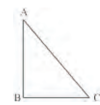
त्रिकोणमिति (Trigonometry)

त्रिकोणमितीय अनुपातः-

(i) छः अनुपात ज्यामिति के समकोण त्रिभुज के न्यून कोण से प्राप्त किए जाते हैं।

जैसेः- Sin c, Cos c, Tan c, Cot c,

Sec c, Cosec c



(ii) एक अनुपात का मान प्राप्त हो तो ज्यामिति के पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कर अन्य अनुपात हम ज्ञात कर सकते हैं।

$$Sin\ c = \frac{p}{h},\ Cos\ c = \frac{b}{h}, Tan\ c = \frac{p}{b},$$
$$Cosec\ c = \frac{h}{p},\ Sec\ c = \frac{h}{b},\ Cot\ c = \frac{b}{p}$$

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$
$$h^2 = p^2 + b^2$$

(iii) अगर तीन अनुपात, $Sin\ c = \frac{AB}{AC}, Cos\ c = \frac{BC}{AC}, Tan\ c = \frac{AB}{BC}$ प्राप्त हैं तो अन्य तीन भी इनके द्वारा निकाल सकते हैं। $Sin\ c$ का उल्टा $Cosec\ c$, $Cos\ c$ का उल्टा $Sec\ c$ तथा $Tan\ c$ का उल्टा $Cot\ c$ प्राप्त हो जाएगा।

$$\therefore Cosec\ c = \frac{AC}{AB}, Sec\ c = \frac{AC}{BC}, Cot\ c = \frac{BC}{AB}$$

उदाहरणः- यदि $Sin\ c = \frac{4}{5}$ तो $Cos\ c$ तथा $Tan\ c$ का मान ज्ञात करे।

यहाँ $Sin\ c = \frac{p}{h} = \frac{4}{5}$ है।

$$\therefore\ b = \sqrt{h^2 - p^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$$
$$= \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore\ Cos\ c = \frac{b}{h} = \frac{3}{5},\ Tan\ c = \frac{p}{b} = \frac{4}{3}$$

(iv) कुछ विशिष्ट कोणों जैसे 0 ,30 ,45 ,60 ,90 का त्रिकोणमितीय अनुपात दिये गये

सारणी से याद कर प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

जैसेः– $Sin60^\circ\ Cos30^\circ + Sin30^\circ\ Cos60^\circ$ का मान ज्ञात करें।

हलः– $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
$SinA$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$CosA$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$TanA$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित

(iv) पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

$$Sin(90-A)=CosA,\quad Cos(90-A)=SinA,\quad Tan(90-A)=CotA,$$
$$Cot(90-A)=TanA,\quad Sec(90-A)=Cosec\,A,\quad Cosec(90-A)=SecA$$

जैसेः– (i) $\frac{Tan65^\circ}{Cot25^\circ}$ का मान निकालिए।

हलः– $Cot25^\circ = Cot(90^\circ - 65^\circ) = Tan65^\circ$

$\frac{Tan65^\circ}{Tan65^\circ}=1$

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय निष्पतियों (अनुपात) से ही सर्व समिकाएँ उत्पन्न हुई हैं।

उदाहरणार्थः- (i) $Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1$

(ii) $Sec^2\theta - Tan^2\theta = 1$

(iii) $Co\sec^2\theta$ - $Cot^2\theta = 1$

(iv) $Tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta}, \quad Cot\theta = \frac{Cos\theta}{Sin\theta}$

उपरोक्त सर्व समिकाओं तथा बीजगणितीय सर्व समिकाएँ (सूत्रो) को स्मरण कर सर्व समिकाएँ हल की जा सकती हैं।

उदाहरणः- $\frac{CosA}{1+SinA} + \frac{1+SinA}{CosA} = 2SecA$

हलः- $\frac{Cos^2A + (1+SinA)^2}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{Cos^2A + 1 + 2SinA + Sin^2A}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{2+2SinA}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{2(1+SinA)}{CosA(1+SinA)}$

$= \frac{2}{CosA} = 2SecA$

☆☆☆

अध्याय-9

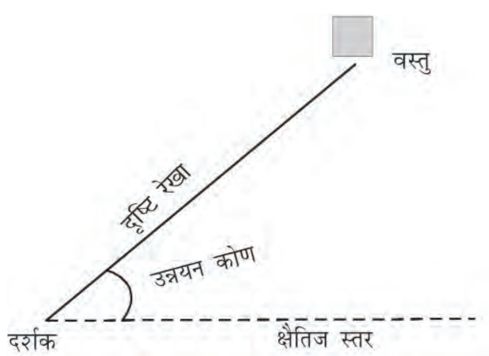
त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

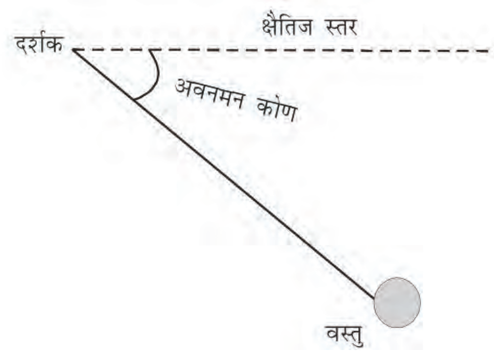
(i) दृष्टि रेखा—प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिन्दु को मिलाने वाली रेखा होती है।

(ii) देखी गई वस्तु का उन्नयण-कोण → उन्नयण कोण दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है। यह क्षैतिज स्तर से ऊपर होता है।

(iii) अवनमन कोण → अवनमन कोण दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है।

(iv) त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से किसी वस्तु की ऊँचाई या लम्बाई दो सुदुर वस्तुओं के बीच की दूरी ज्ञात की जा सकती है।





(v) त्रिकोणमितीय अनुपातों का प्रयोग कर हम ऊँचाई दूरी के प्रश्नों का हल कर सकते हैं। ऊँचाई और दूरी के प्रश्नों के लिए उन्नयन कोण (Angle of elevation)और

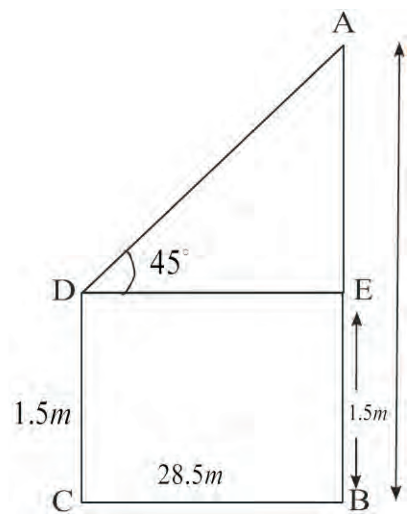
अवनमन कोण (Angle of depression) समझ कर चित्र बनाकर प्रश्नों का हल सम्भव है।

जैसे:- $1.5m$ लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से $28.5m$ की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई बताइए।

हल:- यहाँ AB चिमनी है CD प्रेक्षक है और $\angle ADE$ उन्नयन कोण 45° है।

चिमनी, $AB = AE + BE$ है।

ADE एक समकोण त्रिभुज है जिस में $\angle E$ समकोण है।



$CD = BE = 1.5m$

$BC = DE = 28.5m$

समकोण ΔADE में

$$Tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

या $$1 = \frac{AE}{28.5m}$$

$\therefore AE = 28.5m$

$\therefore AB = AE + BE$

$= 28.5 + 1.5$

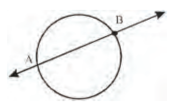
$= 30m$

अध्याय-10

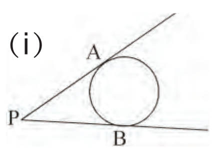
वृत्त (Circle)

छेदक रेखा (Secants)

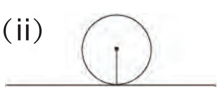
वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है।



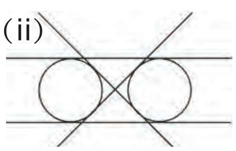
(i)



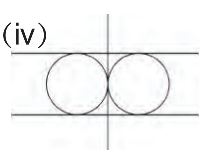
(ii)



(ii)



(iv)



स्पर्श रेखा (Tangent)

वृत्त को एक ही बिन्दु पर काटती है या स्पर्श करती है और वह बिन्दु स्पर्श बिन्दु (Point of Contact) कहलाती है

(i) किसी वाह्य बिन्दु से वृत्त पर अधिकतम दो सपर्श रेखा खींची जा सकती है और दोनों की लम्बाईयाँ बराबर होती हैं। अर्थात $PA = PB$

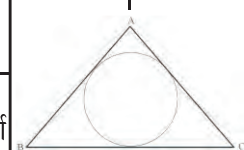
(ii)वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

(iii) दो वृत्त जो एक दूसरे को स्पर्श नहीं करते उनपर 4 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

(iv) वाह्य स्पर्शी वृत्त पर तीन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

अन्तः वृत्त (In-circle)

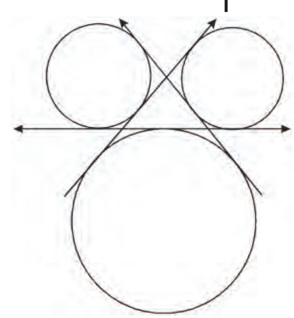
त्रिभुज के तीनों भुजाओं को स्पर्श करती है।



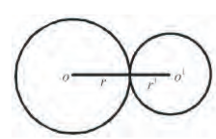
बर्हिवृत्त (Ex – circle)

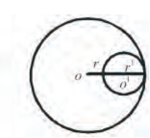
(i) त्रिभुज के एक भुजा को स्पर्श करती है।

(i)प्रत्येक त्रिभुज के तीन बर्हिवृत्त हो सकते हैं।



यदि दो वृत्त एक दूसरे को आंतरिकतः या वाह्यतः स्पर्श करते हों तो स्पर्श बिन्दु केन्द्रों से होकर जाने वाली रेखा पर स्थित होता है।





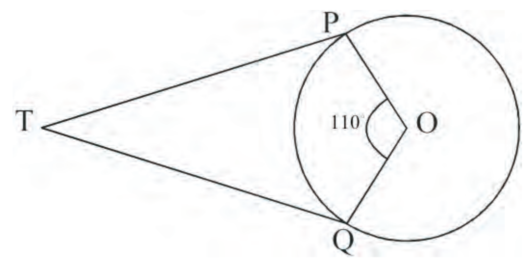
प्रश्न 1. दिये गये चित्र में, यदि TP और TQ केन्द्र 'O' वाले एक वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $\angle POQ = 110^\circ$ तो $\angle PTQ$ को मान क्या होगा।

उत्तरः- चूँकि TP और TQ वृत्त की स्पर्श रेखा है।

(प्रमेय से) $OP \perp PT, OQ \perp QT$

$\therefore \angle OQT = 90^\circ = \angle OPT$

पुनः "$PTQO$" एक चतुर्भुज है।



$$\therefore \angle PTQ + \angle OPT + \angle OQT + \angle POQ = 360^\circ$$

$$\therefore \angle PTQ + 90^\circ + 90^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PTQ = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ$$

प्रश्न 2. ΔABC का अन्तः वृत्त भुजाओं BC, CA और AB को क्रमशः D, E और F पर स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि

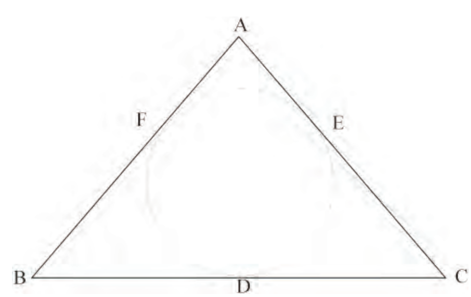
$$AF + BD + CE = AE + CD + BF = \frac{1}{2}(\Delta ABC \text{ का परिमाप})$$

उत्तरः- (प्रमेय से) किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयाँ समान होती है।

$\therefore AF = AE$

$BD = BF$

$CE = CD$



उपरोक्त संगत पक्षों को जोड़ने पर

$AF + BD + CE = AE + BF + CD$.........$(i)$

पुनः, $\frac{1}{2}(\Delta ABC$ का परिमाप$) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

$$= \frac{1}{2}(AF + FB + BD + DC + CE + EA)$$

$$= \frac{1}{2}[(AF + BD + CE) + (AE + BF + CD)]$$

$$= \frac{1}{2}[(AF + BD + CE) + (AF + BD + CE)] \qquad [(i)\text{से}]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (AF + BD + CE) = AF + BD + CE$$

$$= AE + BF + CD \qquad [(i)\text{से}]$$

प्रश्न3. 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के किसी बिन्दु P पर PQ स्पर्श रेखा है। वृत्त का केन्द्र O से गुजरने वाली रेखा को Q पर काटती है ताकि $OQ = 12$ सेमी। PQ की लम्बाई है।

उत्तरः- $PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2}$

$= \sqrt{12^2 - 5^2}$

$= \sqrt{119}$

अध्याय–11

रचनाएँ (बनावट)
Constructions

रेखाखण्ड का विभाजन पर रचना

किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना

समरूप त्रिभुज पर रचना

रेखाखण्ड का विभाजन पर रचनाः–

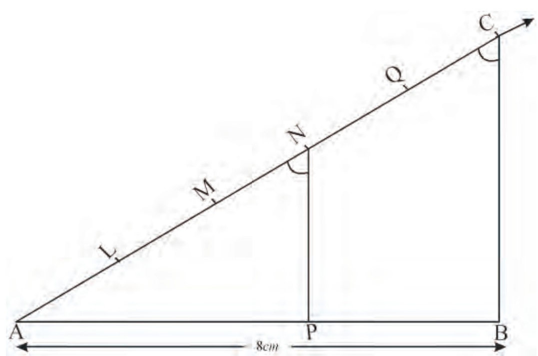
प्रश्नः– $8cm$ लम्बे एक रेखाखण्ड AB को बिन्दु P पर इस प्रकार विभाजित करें कि $AP:PB=3:2$ हो।

रचना के चरणः–

(i) $AB=8cm$ खींचें।

(ii) AB के साथ कोई न्यूनकोण बनाती हुई रेखा AC खींचें।

(iii) AC पर पाँच बराबर चाप AL, LM, MN, NQ, QC काट कर L, M, N, Q, C अंकित कर दें।



$$\boxed{\frac{AP}{PB}=\frac{3}{2}}$$

(iv) C से B को मिलाएँ।

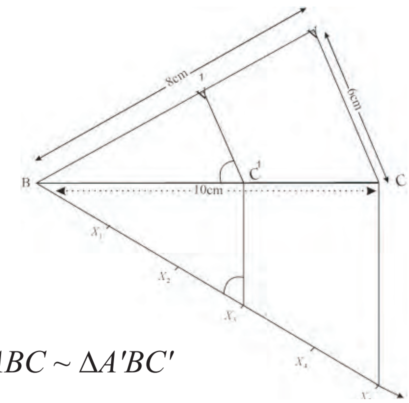
(v) तीसरे बिन्दु N से $NP \parallel CB$ खींचें जो AB को P बिन्दु पर काटती है।

इस प्रकार P बिन्दु AB को $3:2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

समरूप त्रिभुज पर रचनाः-

प्रश्नः- एक ΔABC की रचना करे जिसमें $AB = 8cm, BC = 10cm$ एवं $AC = 6cm$ है। फिर ΔABC के समरूप एक $\Delta A'BC'$ की रचना करें जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{5}$ गुनी है।

रचना के चरणः-



$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$

(i) $BC = 10cm$ खींचें।

(ii) B से $8cm$ त्रिज्या का एवं C से $6cm$ त्रिज्या का चाप काटें।

(iii) माना कि दोनों चाप एक दूसरे को A बिन्दु पर काटते हैं।

(iv) A से B तथा C को मिलाएँ। इस प्रकार ΔABC प्राप्त होगा।

(v) B बिन्दु पर कोई न्यूनकोण $\angle CBX$ बनाएँ।

(vi) B से BX पर पाँच बराबर चाप $BX_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4$ एवं X_4X_5 काट कर X_1, X_2, X_3, X_4 एवं X_5 अंकित कर दें।

(vii) CX_5 को मिलाएँ एवं X_3 से $X_3C' \parallel X_5C$ खींचें जो BC को C' पर काटती है।

(viii) फिर C' से $C'A' \parallel CA$ खींचें जो AB को A' पर काटती है। इस प्रकार आपको $\Delta A'BC'$ प्राप्त होगा जो ΔABC के समरूप होगा।

किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचनाः-

प्रश्नः- एक वृत्त के केन्द्र से $5cm$ की दूरी पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खीचें जबकि वृत्त की त्रिज्या $2cm$ है।

रचना के चरणः-

(i) कोई बिन्दु O को केन्द्र मानते हुए $2cm$ त्रिज्या का एक वृत्त खींचें।

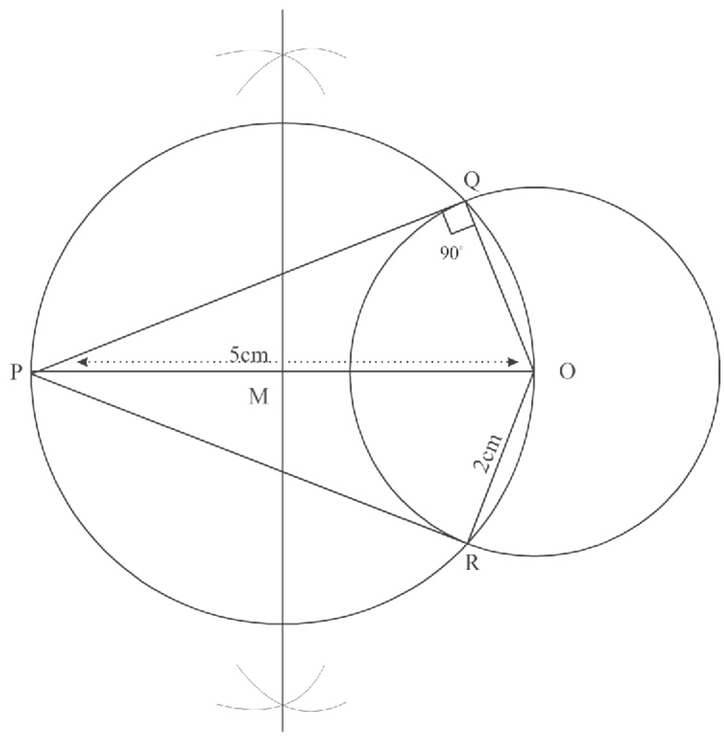
(ii) अब O बिन्दु से P बिन्दु तक एक रेखा इस प्रकार खींचें कि $OP = 5cm$ हो।

(iii) OP को समद्विभाग करें तथा मानें कि समद्विभाग बिन्दु M है।

(iv) अब M को केन्द्र OM को त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचें जो दिए वृत्त को Q तथा R पर काटता है।

(v) PQ तथा PR को मिला दें।

(vi) इस प्रकार PQ तथा PR दो अभिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं।



$$PO = 5cm$$
$$r = OR = 2cm$$

स्पर्श रेखाएँ

$(i) PQ$

$(ii) PR$

$$\angle PQO = 90$$

अध्याय-12

वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल:

(i) एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है, जिसे प्राय: परिधि (Circumference) कहा जाता है। वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ एक अचर अनुपात होता है। इस अचर अनुपात को यूनानी अक्षर π (पाई) से व्यक्त किया जाता है।

$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

परिधि $= \pi \times$ व्यास

या, $C = \pi \times d$

या, $C = 2\pi r$

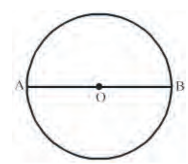
वृत्त का क्षेत्रफल$= \pi r^2$

व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या

$d = 2r$

जहाँ $d =$ व्यास

$r =$ त्रिज्या



AB व्यास $= d$

$OB = OA = r$ त्रिज्या

व्यवहारिक कार्य के लिए $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 लेते हैं।

उदाहरण: एक वृत्ताकार खेत पर 24 रू0 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय 5280 रू0 है। इस खेत की 0.50 रू0 प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।(यदि $\pi = \frac{22}{7}$)

हलः- बाड़ की लम्बाई (मीटर में) $= \dfrac{\text{पूरा व्यय}}{\text{दर}} = \dfrac{5280}{24} = 220m$

खेत की परिधि $(C) = 220m$

$$2\pi r = 220 \quad (r \text{ मीटर में})$$

$$r = \frac{220}{2\pi} = \frac{220}{2\times\frac{22}{7}} = \frac{220x7}{2\times 22}$$

$$= 35m$$

खेत का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7}\times 35\times 35m^2$$

$$= 22\times 5\times 35m^2$$

$1\,m^2$ खेत की जुताई का व्यय $= 0.50$ रू0

खेत की जुताई कराने का कुल व्यय $= 22\times 5\times 35\times 0.50$

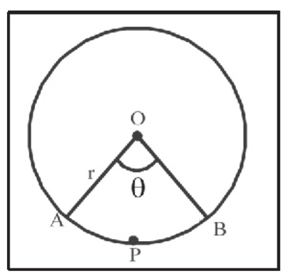
$= 1925$ रू0

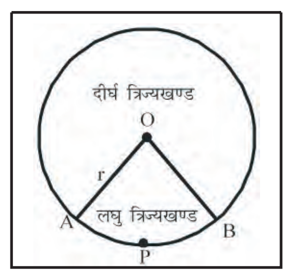
त्रिज्यखण्ड और वृत्तखण्ड के क्षेत्रफल

त्रिज्यखण्डः

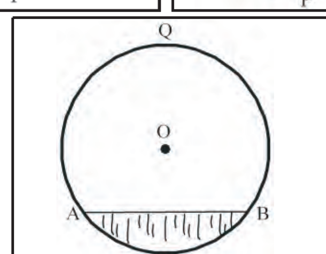
एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिबद्ध) हो, उस वृत्त का त्रिज्यखण्ड कहलाता है।

$\angle AOB$ त्रिज्यखण्ड का कोण कहलाता है।





वृत्तखण्ड- वृत्त की जीवा तथा चाप से घिरे क्षेत्र को वृत्तखण्ड कहते हैं APB लघुवृत्तखण्ड तथा AQB दीर्घवृत्तखण्ड कहलाता है।



त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल:

जब केन्द्र पर बने कोण का अंशीय माप 360° है, तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $=\pi r^2$

अत: जब केन्द्र पर बने कोण का अंशीय माप 1° है, तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{\pi r^2}{360^\circ}$

इसलिए जब केन्द्र पर बने कोण का अंशीय माप θ है, तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{\pi r^2\times\theta}{360}$

$$\boxed{\text{कोण } \theta \text{ वाले त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360}\times\pi r^2}$$

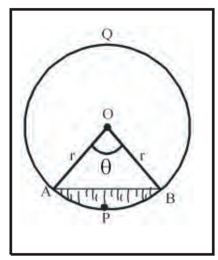
इसी तरह संपूर्ण वृत्त (360 कोण वाले) की लम्बाई $=2\pi r$

$\therefore$ θ कोण बनाने वाले चाप की लम्बाई $=\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$

$$\boxed{\therefore \text{ कोण } \theta \text{ वाले त्रिज्यखण्ड के संगत चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360}\times 2\pi r}$$

वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल $=\frac{\theta}{360}\times\pi r^2-\Delta OAB$ का क्षेत्रफल

वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{\pi r^2\times\theta}{360}-\frac{1}{2}r^2\sin\theta$

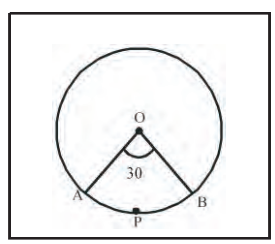


दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $=\pi r^2$–(लघु वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल)

दीर्घ त्रिज्यखण्ड $OAQB$ का क्षेत्रफल $=\pi r^2$ –(लघु त्रिज्यखण्ड $OAPB$ का क्षेत्रफल)

उदाहरण- त्रिज्या $4cm$ वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही, संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। $(\pi=3.14)$

हल:- दिया हुआ त्रिज्यखण्ड $OAPB$ है। (चित्र में देखें)



त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{\theta}{360}\times\pi r^2$

$=\frac{30}{360}\times 3.14\times 4\times 4cm^2$

$=\frac{12.56}{3}cm^2$

$=4.19cm^2$

संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 -$ त्रिज्यखण्ड $OAPB$ का क्षेत्रफल

$$= 3.14 \times 16 - 4.19$$

$$= 46.05cm^2 = 46.1cm^2$$

वैकल्पिक विधि से, दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{360-\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{360-30}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16$$

$$= 46.05cm^2$$

$$= 46.1cm^2 \text{ (लगभग)}$$

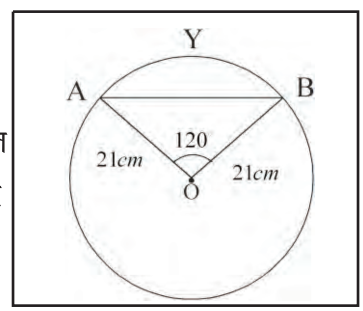
(ii) **उदाहरण**- निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:-

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण P° है, निम्नलिखित है:

(A) $\frac{P}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{P}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{P}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

उत्तर:- $(D) \frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

उदाहरण:- आकृति मे दर्शाए गये वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि वृत्त की त्रिज्या $21cm$ है और $\angle AOB = 120$ है। $(\pi = \frac{22}{7})$

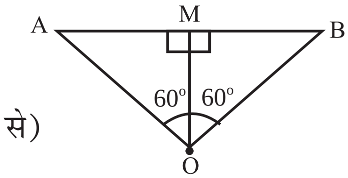


हल:- वृत्तखण्ड AYB का क्षेत्रफल= त्रिज्यखण्ड $OAYB$ का क्षेत्रफल- ΔOAB का क्षेत्रफल ....(i)

त्रिजयखण्ड $OAYB$ का क्षेत्रफल $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 cm^2$

$$= 462cm^2 \qquad \text{............(ii)}$$

ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए $OM \perp AB$ चाहिए।



जैसा चित्र में दर्शाया गया है।

यहा $OA = OB$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

अत: $\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (RHS सर्वांगसमता से)

$\therefore AM = BM$

$\therefore M$ जीवा AB का मध्य बिन्दु है तथा

$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

मान लीजिए $OM = xcm$ है।

इसलिए ΔOMA से,

$$Cos60^\circ = \frac{OM}{OA}$$

या, $$\frac{1}{2} = \frac{x}{21}$$

$$x = \frac{21}{2} cm$$

$$Sin60^\circ = \frac{AM}{OA}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{21}$$

$$AM = \frac{21\sqrt{3}}{2} cm$$

$$AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3}$$

अत: ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} cm^2$

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3} cm^2 \qquad \text{.............(iii)}$$

इसलिए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right) cm^2$

(समीकरण (i),(ii),(iii)से)

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3}) cm^2$$

उदाहरण- त्रिज्या $21cm$ वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:

(i) चाप की लम्बाई

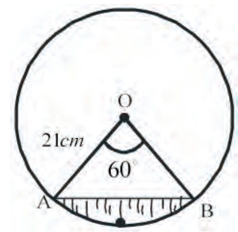
(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

हलः- (i) चाप की लम्बाई $(AB) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{60}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$$= 22cm$$



(ii) चाप द्वारा बनए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 231cm^2$$

(iii)संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$$= 231 - \frac{1}{2} \times 21 \times 21 \times \sin 60^\circ$$

$$= 231 - \frac{1}{2} \times 21 \times 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

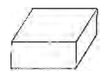
$$= 231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}$$

$$= \left(\frac{924 - 444\sqrt{3}}{4}\right) cm^2$$

अध्याय–13

आयतन तथा क्षेत्रफल→ ठोस आकृतियाँ – समतल सतह

घनाभ



कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + \ell h)$ वर्ग इकाई

आयतन $= \ell \times b \times h$ घन इकाई

विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

घन

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= (6\text{भुजा}^2)$ वर्ग इकाई

आयतन $=$ भुजा^{3} घन इकाई

विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{3}$ भुजा इकाई

ठोस आकृतियाँ-वक्र सतह

बेलन

आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

आधार की परिधि $= 2\pi r$

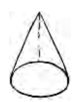
आयतन=

(आधार का क्षे0)× ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

शंकु



आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r\ell$

सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r(\ell + r)$

आधार की परिधि $= 2\pi r$

आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

अर्द्ध गोला

आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2$

सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल

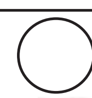
$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

आधार की परिधि $= 2\pi r$

आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

गोला (Sphere)



सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षे0 $= 4\pi r^2$

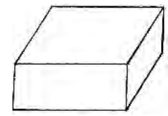
आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

ठोस आकृतियों के आयतन तथा क्षेत्रफल

(Volume and Surface area of Solid)

ठोस (Solid):- आधारभूत आकृतियाँ - घनाभ, घन, शंकु, बेलन और गोला

वे वस्तुएँ जिनकी आकार (Shape) एवं माप (Size) निश्चित होती है, ठोस वस्तुएँ कहलाती हैं।



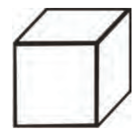
1. घनाभ:- जिनक फलक (Faces) आयताकार होते हैं।

सूत्र- (i) आयतन $= (\ell \times b \times h)$ घन इकाई जहाँ $\ell =$ लम्बाई, $b =$ चौड़ाई, $h =$ ऊँचाई

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + \ell h)$ वर्ग इकाई

(iii) विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

2. घन:- जिसके सभी फलक वर्गाकार होते हैं। एक भुजा $= a$ इकाई

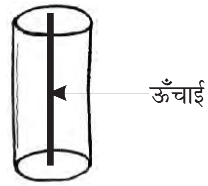


सूत्र- (i) आयतन $= a^3$ घन इकाई

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$ वर्ग इकाई

(iii) विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{3}\,a$ इकाई

3. ठोस बेलन:- दोनो आधार (Base) सर्वागसम होते हैं तथा आकार वृत्ताकार होते हैं।



सूत्र- (i) आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

(ii) आधार का परिधि $= 2\pi r$

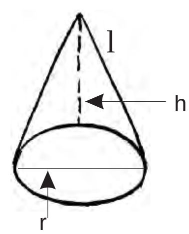
(iii) बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

(iv) बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r(r+h)$ वर्ग इकाई

(v) बेलन का आयतन $= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

4. शंकु (Cone):-



सूत्र- (i) शंकु के आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ वर्ग इकाई

(ii) शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r \ell$ वर्ग इकाई

(iii) शंकु के आधार की परिधि $= 2\pi r$ इकाई

(iv) शंकु के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल वक्रपृष्ठ $= \pi r \ell + \pi r^2$

$= \pi r(\ell + r)$

(v) शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ घन इकाई

5. गोला (Sphere):- जैसे- कंचे की गोली, फुटबॉल, क्रिकेट बॉल।

सूत्र- (i) गोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई

(ii) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाई

6. अर्द्धगोला (Hemispher):- गोले के दो समान भाग में से प्रत्येक भाग अर्द्धगोला कहलाता है।

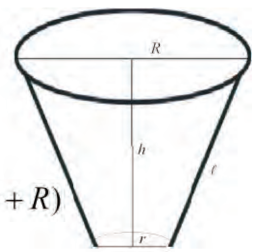
सूत्र- (i) वक्रपृष्ट का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

(ii) अर्द्धगोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

(ii) अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

7. लम्बवृत्तीय शंकु के छिन्नक(Frustum of a Right Circular Cone):- जैसे- बाल्टी।



सूत्र- (i) शंकु के छिन्नक या बाल्टी का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R.r + r^2)$$

(ii) बाल्टी (छिन्नक) के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi\ell(r+R)$

(iii) शंकु के छिन्नक के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$= \pi R^2 + \pi r^2 + \pi\ell(R+r)$$

$$= \pi[R^2 + r^2 + \ell(R+r)]$$

(iv) शंकु के छिन्नक की तिरछी ऊँचाई $= \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

उदाहरण:- (1)45 cm उँची बाल्टी की सिरों की त्रिज्यायें 28 cm और 7 cm है। बाल्टी का आयतन ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $h = 45cm$, $R = 28cm$, $r = 7cm$

सूत्र से, आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + R.r)$ घन इकाई

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 45(28^2 + 7^2 + 28 \times 7)$$ घन सेमी0

$= \frac{22\times15}{7}(784+49+196)$ घन सेमी0

$= \frac{22\times15}{7}\times1029$ घन सेमी0

$= 22\times15\times147$ घन सेमी0

$= 48510$ घन सेमी0

उदाहरणः- **(2)** उस गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें जिसका व्यास 14 सेमी है।

प्रश्न से, गोले का व्यास $= 14cm$

त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{14}{2} = 7cm$

सूत्र से, गोले का पृष्ट क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}(7)^2 cm^2$

$= 88\times7cm^2$

$= 616cm^2$

उदाहरणः- **(3)** $8\,cm$ त्रिज्या वाले एक गोले से $1cm$ त्रिज्या वाली कितनी ठोस गोलियाँ बनाई जा सकती हैं?

उत्तर- बड़ी गोली का आयतन $= \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times8^3\,cm^3$

छोटी गोली का आयतन $= \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times1^3\,cm^3$

$\therefore$ अभीष्ट गोलियों की संख्या $= \dfrac{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times8^3}{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times1^3} = 8^3 = 512$

उदाहरणः- **(4)** $12\,cm$ व्यास का एक वृत्तीय बेलन जल से अंशतः भरा हुआ है। यदि

उसमें $6cm$ व्यास का एक गोल पूर्णतः डुबा दिया जाता है, तो बेलन में जल की सतह कितनी ऊँचाई उठ जाएगी?

उत्तरः- प्रश्न से, गोले का व्यास $=6cm$

$\therefore$ गोले की त्रिज्या $=3cm$

गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 3^3$ घन सेमी0

$=36\pi$ घन सेमी0

फिर, माना कि जल सतह h सेमी0 से उपर उठ जाती है।

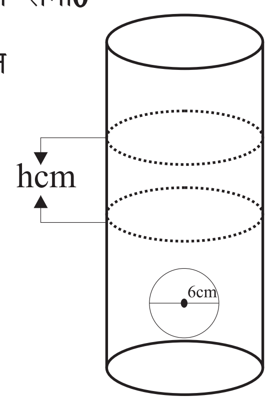
तो उठे हुए जल का आयतन $=\pi(\frac{12}{2})^2\times h$ घन सेमी**0**

प्रश्न से, उठे हुए जल का आयतन = गोले का आयतन

या, $\pi 36h=36\pi$

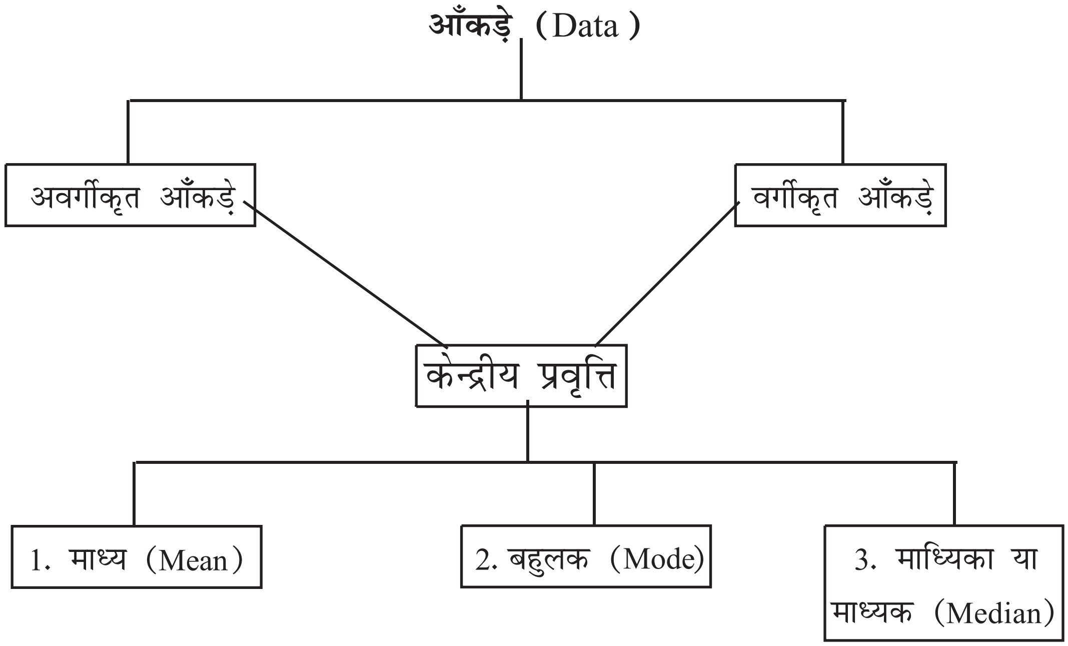
$\therefore$ $h=1$

अतः जल स्तर $1\,cm$ से उठ जाती है।



अध्याय–14

सांख्यिकी (Statistics)



1. माध्य (Mean):-

दिए गए आँकड़ों के कुल प्रेक्षणों (Observations)के योगफल एवं प्रेक्षणों की कुल संख्या के अनुपात को माध्य या औसत (Mean or average) कहते हैं।

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निकालना:-

सबसे पहले प्रत्येक वर्ग अन्तराल का मध्य बिन्दु (Midpoint) या वर्ग चिह्न (Class mark)उसकी ऊपरी और निचली सीमाओं का औसत निकालकर ज्ञात करते हैं।

निम्न आँकड़े को देखें:-

वर्ग अन्तराल (प्राप्तांकों)	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

इसमें 10–25 का वर्ग चिह्न $=\frac{10+25}{2}=17.5$ है

अब हम माध्य निकालने के लिए निम्न सारणी बनाते हैं-

वर्ग अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	($f_i x_i$)
10–25	2	17.5	35.0
25–40	3	32.5	97.5
40–55	7	47.5	332.5
55–70	6	62.5	375.0
70–85	6	77.5	465.0
85–100	6	92.5	555.0
योग	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860$

अतः माध्य $x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$

2. बहुलक (Mode):-

प्रेक्षणों का वह मान जो सबसे अधिक बार आता है।

वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक-

एक उदाहरण- 20 परिवारो के सदस्यों की संख्या के वर्गीकृत आँकड़े इस प्रकार है-

परिवार माप	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11
परिवारों की सं0	7	8	2	2	1

इस आँकड़े में अधिकतम वर्ग बारंबारता 8 है, अतः बहुलक वर्ग कीबारम्बारता $(f_1) = 8$ तथा बहुलक वर्ग $= 3-5$

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा $(\ell) = 3$ तथा वर्गमाप $(h) = 2$ है।

बहुलक वर्ग के ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता $(f_0) = 7$

बहुलक वर्गके ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता $f_2 = 2$ है।

अब सूत्र से, बहुलक $= \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times8-7-2}\right)\times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

अतः उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक 3.286 है।

3. माध्यक (Median):-

प्रेक्षणों का वह मान जो प्रेक्षणों में सबसे बीच का है। इसके लिए प्रेक्षणों के मानों का आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। अब यदि प्रेक्षणों की कुलसंख्या n) विषम है तो माध्यक $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वे प्रेक्षण होगा और n सम है तो माध्यक$=\frac{n}{2}$वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों का औसत होगा।

उदाहरण के लिए एक परीक्षा में 100 विद्यार्थियों द्वारा 50 में से प्राप्त अंक का आँकड़ा लेते हैं-

प्राप्तांक	20	29	28	33	42	38	43	25
विद्यार्थियों की संख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

सबसे पहले हम प्राप्त अंको का आरोही क्रम में सजाते हैं-

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)	संचयी बारंबारता $c \cdot f$
20	6	6
25	20	$6 + 20 = 26$
28	24	$26 + 24 = 50$
29	28	$50 + 28 = 78$
33	15	$78 + 15 = 93$
38	4	$93 + 4 = 97$
42	2	$97 + 2 = 99$
43	1	$99 + 1 = 100$
योग	100	

यहाँ $n=100$ है जो सम संख्या है।

इसलिए माध्यक = प्रेक्षण $\frac{n}{2}$वें तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों का सारणी से

50 वाँ प्रेक्षण$=28$ है।

51 वाँ प्रेक्षण$=29$ है।

इसलिए, माध्यक $=\frac{28+29}{2}=28.5$

वर्गीकृत आँकड़े का माध्यक निकालना–

100 अंक के एक परीक्षा में 53 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का वर्गीकृत बारंबारता बंटन इस प्रकार है–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	
0–10	5	
10–20	3	
20–30	4	
30–40	3	
40–50	3	
50–60	4	
60–70	7	
70–80	9	
80–90	7	
90–100	8	

सबसे पहले दी गई बारंबारता बंटन के लिए एक संचयी बारंबारता सारणी बनायें। 'से कम' या 'से अधिक' दोनों प्रकार के संचयी बारंबारता में से किसी एक को ले सकते हैं–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी बारंबारता (cf)
0–10	5	5
10–20	3	8
20–30	4	12
30–40	3	15
40–50	3	18
50–60	4	22
60–70	7	29
70–80	9	38
80–90	7	45
90–100	8	53

अब हम वह वर्ग खोजते हैं जिसकी संख्यी बारंबारता $\frac{n}{2}$ से अधिक और उसके निकटतम हो। इस वर्ग को माध्यक वर्ग (Median Class) कहते हैं।

यहाँ $n = 53$ है।

अत: $\frac{n}{2} = 26.5$ हुआ।

अत: माध्यक वर्ग $60 - 70$ होगा।

हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके माध्यक ज्ञात करते हैं।

$$\text{माध्यक} = \ell + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

जहाँ $\ell =$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

$n =$ प्रेक्षणों की संख्या

$cf =$ माध्यक वर्ग से ठीक पहले की संचयी बारंबारता

$f =$ माध्यक वर्ग की बारंबारता

$h =$ वर्ग माप

यहाँ $\frac{n}{2} = 26.5$

$\ell = 60$

$cf = 22$

$f = 7$

$h = 10$

$$\text{तो माध्यक} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7} \right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7} = 66.428$$

$\Rightarrow$ उपरोक्त तीनों केन्द्रीय प्रवृति के मापकों में निम्न संबंध होता है–

$$\boxed{3\ \text{माध्यक} = \text{बहुलक} + 2\ \text{माध्य}}$$

अध्याय-15

प्रायिकता (Probability)

किसी घटना के होने या घटने के अंकीय (Numerical) मान होता है।

- **ऋणात्मक मान**
  - यह किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती। जैसे- $\rightarrow -1, -0.5$
  - किसी घटना की प्रायिकता 1 से बड़ी नहीं होती है। जैसे- $1.5, \frac{3}{2}, 7$
- **1**
  - निश्चित घटना की प्रायिकता होती है।
- **0**
  - अनिश्चित या असंभव घटना की प्रायिकता होती है।
- **0 एवं के 1 बीच**
  - किसी घटना की प्रायिकता हो सकती है $0 < P(E) < 1$ जैसे- $\rightarrow \frac{1}{2}, 0.3$ $\frac{5}{7}$ इत्यादि
- किसी एक प्रयोग के सभी घटनाओं के प्रायिकता का योग 1 होता है।
- (किसी घटना के घटने की प्रायिकता) + (नहीं घटने की प्रायिकता) का योग = 1
  अर्थात, $P(E) + P(E^{|}) = 1$
  $\Rightarrow P(E^{|}) = 1 - P(E)$

प्र01. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दो पासों की संख्याओं का योग (i) 8 हो, (ii) 12 से छोटी या उसके बराबर हो।

उत्तर- दो पासों को एक साथ फेंकने पर कुल संभव परिणामों की संख्या = 36

दोनों पासों की संख्या का योग 8 निम्न प्रकार से हो सकता है:

(2,6), (6,2), (4,4), (5,3), (3,5)

($\rightarrow$ सभी अंकों का योग 8 है। जहाँ 2 पहले पासे पर आने वाले अंक और 6 दूसरे पासे पर आने वाले अंक इत्यादि)

$$\left[\begin{array}{l} \text{योग } 2,\ 1 \text{ तरीके से} \\ \text{योग } 3,\ 2 \text{ तरीके से} \\ \text{योग } 4,\ 3 \text{ तरीके से} \\ \text{योग } 5,\ 4 \text{ तरीके से} \\ \cdots\cdots\cdots \text{ इत्यादि} \end{array}\right]$$

(i) अत: P (योग 8 होने का) $\frac{\text{अनुकुल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{36}$

(ii) 12 से छोटी या उसके बराबर योग आने के कुल तरीके=36

(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=36)

$\therefore$ P (12 से छोटी या उसके बराबर योग आने की) $\frac{\text{अनुकुल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{36}{36} = 1$

प्र02. 3 विद्यिर्थियों के एक समूह में से 2 विद्यर्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता 0.992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन है।

उत्तर- माना कि घटना $E = 2$ विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की घटना।

तो $E^1 =$ जन्मदिन एक ही दिन होने की घटना।

$\because \quad P(E) + P(E^1) = 1$

$\Rightarrow P(E) + 0.992 = 1$

$\Rightarrow P(E) = 1 - 0.992 = 0.008$

प्र03. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो 'Eनही' की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- $\because \quad P(E) + P(E\text{नहीं}) = 1$

$\Rightarrow 0.05 + P(E\text{नहीं}) = 1$

$\Rightarrow P(E\text{नहीं}) = 1 - 0.05 = 0.95$

प्र04. दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है तो (i) ठीक दो शीर्ष आने की प्रायिकता (ii) कम से कम एक शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दो सिक्के को एक साथ उछालने पर कुल संभव परिणाम =4

(HH, TT, TH, HT)

[$HT \rightarrow H$ पहले सिक्के पर एवं T दूसरे सिक्के पर आने वाला]

(i) ठीक दो शीर्ष वाले अनुकुल परिणाम $= \{HH\} = '1'$

$\therefore \quad P(\text{ठीक दो शीर्ष}) = \frac{\text{अनुकुल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{1}{4} = 0.25$

(ii) कम से कम एक शीर्ष आने की अनुकुल परिणामों की संख्या $= 3$

$[HH, HT, TH]$

$$P(\text{कम से कम एक शीर्ष}) = \frac{\text{अनुकुल परिणामों संख्या}}{\text{कुल परिणामों संख्या}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

प्र05. एक पासे को एक बार उछाला जाता है। 6 आने की प्रायिकता क्या होगी?

उत्तरः- एक पासे को फेंकने पर कुल संभव परिणामों की संख्या $= 6$

(1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6)

इसमें अनुकुल परिणामों की संख्या $= 1$ (6 केवल एक बार)

$$P(6\text{आने की}) = \frac{1}{6}$$